Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Christoph Brackenhofer — Wintersemester 2022/2023

Algebra und Zahlentheorie
Blatt 6
Abgabe: 6.12.2022, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.**
Sei R ein nicht-trivialer Ring und $a \neq 0_R$ ein Element aus R.

(a) Wenn R nullteilerfrei ist, zeige, dass es ein Ideal I aus R derart gibt, dass $I \cap \{a^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \emptyset$, wobei $a^0 = 1_R$ und $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Wir nehmen nun an, dass ein festes Ideal J von R zu der Teilmenge $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ disjunkt liegt.

(b) Zeige, dass die Menge

$$\mathcal{S} = \{I \underset{\text{Ideal}}{\subsetneq} R \mid J \subset I \text{ mit } I \cap \{a^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \emptyset\}$$

induktiv bezüglich der partiellen Ordnung durch mengentheoretische Inklusion ist.

(c) Zeige, dass jedes maximale Element von $\mathcal{S}$ ein Primideal ist, das J enthält.

(d) Im konkreten Fall, dass $R = \mathbb{Z}$, $a = -4$ und J das triviale Ideal ist, finden wir mit Aufgabenteil (c) ein maximales Element von $\mathcal{S}$. Ist dieses Element eindeutig?

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

(a) Betrachte die Menge $\mathcal{R}$ aller rationalen Cauchyfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beachte, dass $\mathcal{R}$ bezüglich der koordinatenweisen Operationen ein kommutativer nicht-trivialer Ring ist. Ist dieser Ring ein Integritätsbereich?

(b) Sei nun

$$\mathcal{N} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge aus } \mathbb{Q} \text{ mit } a_n \to 0\}.$$

Zeige, dass $\mathcal{N}$ ein echtes Ideal von $\mathcal{R}$ ist.

(c) Zeige, dass $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ ein Körper ist.

HINWEIS: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was wissen wir über $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$?

(d) Bestimme die Charakteristik des Quotientenringes $\mathcal{R}/\mathcal{N}$. Schließe daraus, dass $\mathbb{Q}$ sich in $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ einbetten lässt.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.**
Finde mit Hilfe des (Beweises des) Chinesischen Restsatzes explizit alle Kongruenzklassen $\bar{\alpha}$ aus $\mathbb{Z}/144\mathbb{Z}$ mit $\alpha \equiv -1 \mod 16$ und $\alpha^2 \equiv 1 \mod 9$.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.**

(a) Zeige, dass das mengentheoretische Komplement $S = \mathbb{Z} \setminus (2)$ multiplikativ ist, wobei (2) das von 2 erzeugte Ideal ist.

(b) Setze nun $\mathbb{Z}_{(2)} = S^{-1}\mathbb{Z}$. Zeige, dass es einen wohldefinierten natürlichen Ringmonomorphismus $\mathbb{Z}_{(2)} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ gibt.

(c) Bestimme, welche der Elemente 7 und 36 in der Einheitengruppe $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{(2)})$ liegen.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.